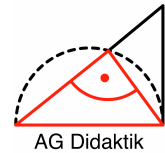


Kreativwerkstatt Mathematik

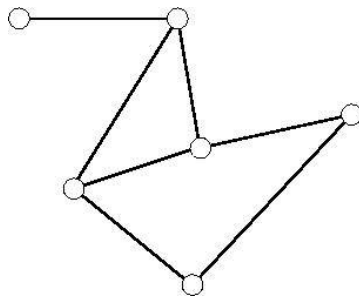
Folge 3, Startidee: Mathematische Farbtöpfe



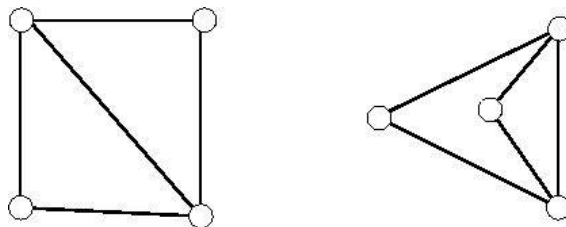
Einleitung

Sind Zahlen in der Mathematik immer das Wichtigste? Vielleicht sagt ihr nun: „Eigentlich schon, außer wenn wir gerade Geometrie machen.“ Stimmt das?

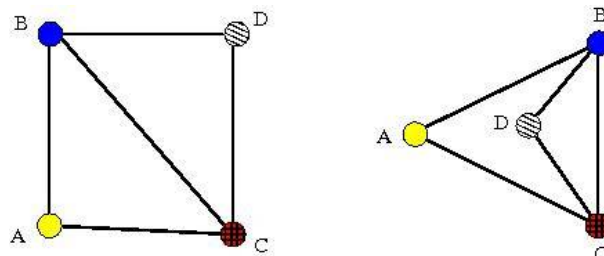
Heute soll es weder um Geometrie gehen, noch stehen die Zahlen im Mittelpunkt. Stattdessen könnt ihr hier mathematische Strukturen kennen lernen, die ausschließlich aus *Punkten* und *Strichen* bestehen und die es trotzdem in sich haben. Diese Strukturen sind sowohl aus rein mathematischer Sicht spannend, als auch für viele Probleme in der Welt nützlich. Es geht um so genannte *Graphen* (die jedoch nichts mit Graphen im Koordinatensystem zu tun haben). Hier seht ihr, wie ein Graph aussehen kann:



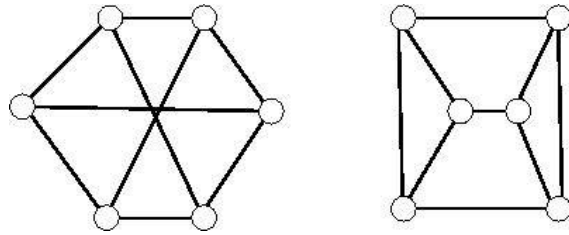
Die Punkte nennen wir *Ecken* und die Striche *Kanten*. Das Wichtige an einem Graphen ist, welche Ecken durch Kanten verbunden sind. Es ist nicht wichtig, wie wir den Graphen zeichnen. So sind diese Graphen z.B. eigentlich die gleichen:



Stellen wir uns vor, die Kanten seien Gummibänder. Wenn wir jetzt die Ecken vom ersten Graphen geschickt verschieben, dann erhalten wir den zweiten. Im nächsten Bild sehen wir, welche Ecken links welchen Ecken rechts entsprechen:



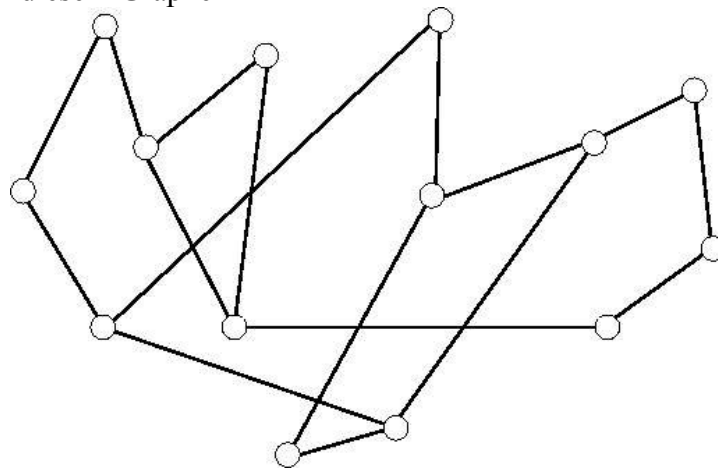
Die folgenden beiden Graphen sind nicht gleich (es stört übrigens nicht, wenn sich einmal Kanten überschneiden. Dadurch entsteht keine neue Ecke):



Wir können an den Ecken so viel schieben, wie wir wollen, die beiden Graphen werden immer unterschiedlich sein.

Es gibt nun viele Fragen, die wir uns stellen können:

- Wie kann man begründen, dass die beiden obigen Graphen nicht gleich sind?
- Wie viele echt unterschiedliche Graphen gibt es mit fünf Ecken und fünf Kanten?
- Wir wollen bei diesem Graphen



die Ecken so einfärben, dass je zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden sind, nicht die gleiche Farbe haben. Was ist die kleinste Anzahl von Farben, die benötigt wird?

- Für welche Graphen brauche ich höchstens zwei Farben, für welche mindestens drei?
- Wenn wir statt der Ecken, die Kanten so einfärben wollen, dass an einer Ecken nur unterschiedlich eingefärbte Kanten stoßen, wie viele Farben brauchen wir nun mindestens?

Aufgabe

Du kannst jetzt auswählen, was du sein willst:

Problemlöser:

Du trittst in die Fußstapfen vorheriger Mathematikerinnen und Mathematiker und versuchst, die obigen Fragen zu lösen. Vielleicht entwickelst du dabei sogar neue Fragen über Graphen und denkst dir eigene Graphen aus, für die die obigen Fragen gut zu beantworten sind.

ODER

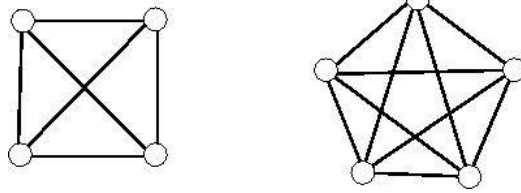
Problemfinder:

Du versuchst neue Probleme zu finden, z.B. welche Graphen kann ich so zeichnen, dass sich keine Kante überschneidet, wie könnte man Graphen noch anders darstellen? Kannst du die obigen Fragen so abwandeln, dass neue Probleme entstehen?

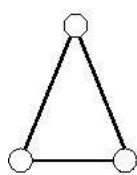
Für weiter Interessierte:

Besondere Graphen:

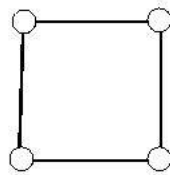
- Jede Ecke ist mit jeder anderen Ecke verbunden, z.B.:



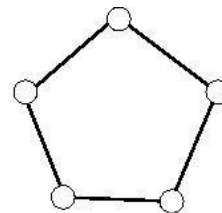
- Jede Ecke hat gleich viele Kanten.
- Nicht zusammenhängende Graphen: das heißt, man kann nicht von jeder Ecke im Graphen zu jeder anderen Ecke gelangen, wenn man über die Kanten läuft.
- So genannte Zyklen:



3er-Zyklus



4er-Zyklus



5er-Zyklus

Eckenfärbung bei Stundenplänen:

Wenn Stundenpläne gemacht werden, muss man es schaffen, dass sich einige Dinge nicht überschneiden. Ein Lehrer kann zum Beispiel nur in einer Klasse gleichzeitig sein, und eine Klasse kann nur einen Lehrer zu einem Zeitpunkt haben. Dabei kann es helfen, sich das Ganze als Graphen vorzustellen und die Ecken zu färben. Wie das geht, können wir am Beispiel einer Jugendfreizeit sehen:

Auf einer Jugendfreizeit in den Sommerferien sollen vormittags verschiedene AGs angeboten werden. Es gibt folgende AGs:

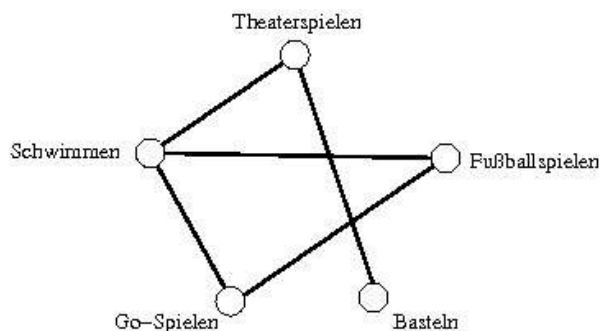
- Schwimmen
- Theaterspielen
- Fußballspielen
- Basteln
- Go-Spielen

Die Teilnehmer dürfen sich zwei AGs davon aussuchen. Nun gibt es Teilnehmer, die Folgendes angekreuzt haben:

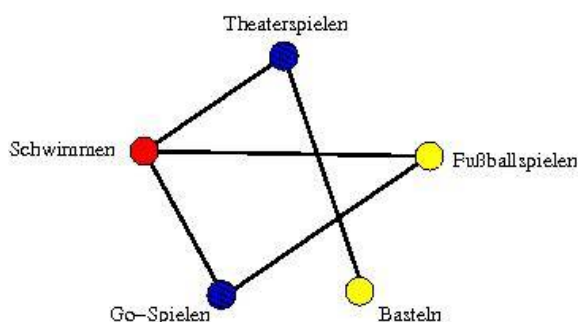
- Go-Spielen und Schwimmen
- Basteln und Theaterspielen
- Schwimmen und Theaterspielen
- Fußballspielen und Go-Spielen
- Fußballspielen und Schwimmen

An wie vielen Vormittagen in der Woche müssen die AGs mindestens angeboten werden, wenn jede AG nur einmal pro Woche stattfindet?

Um das Problem zu lösen, zeichnen wir einen Graphen, bei dem jede Ecke für eine AG steht. Wir zeichnen eine Kante zwischen zwei AGs, wenn es Teilnehmer gibt, die an beiden AGs teilnehmen wollen.



Wir können diesen Graphen zum Beispiel auf die folgende Weise mit drei Farben einfärben:



Geht es auch mit weniger Farben? Nein, denn für diesen Graphen brauchen wir mindestens drei verschiedene Farben, da Fußballspielen, Go-Spielen und Schwimmen einen Dreierzyklus bilden. Wir können diesen Graphen auch anders mit drei Farben einfärben (z.B. kann „Basteln“ auch rot sein), doch mindestens drei Farben sind notwendig.

Wir müssen also die AGs an mindestens drei verschiedenen Vormittagen anbieten. Zum Beispiel an diesen:

<i>Dienstag</i>	<i>Mittwoch</i>	<i>Donnerstag</i>
Theaterspielen	Fußballspielen	Schwimmen
Go-Spielen	Basteln	

Wenn es viel mehr Ecken und Kanten als bei dieser Jugendfreizeit gibt, kann es sehr helfen, das Problem mit Hilfe von Graphen zu lösen. Mathematikerinnen und Mathematiker versuchen dabei möglichst schnelle Algorithmen zu finden, die solche Graphen einfärben.

Kleiner Ausflug: Isomorphie

Auf diesem Arbeitsblatt wurde umgangssprachlich von „gleichen“ Graphen gesprochen. In der Graphentheorie wird stattdessen das Fachwort *isomorph* verwendet. Zwei Graphen sind dann isomorph, wenn man in beiden Graphen die Ecken so mit den gleichen Namen benennen kann, dass zwei mit einer Kante verbundene Ecken in dem einen Graphen auch im zweiten durch eine Kante verbunden sind.